Lycée Descartes
Tours

DEVOIR SURVEILLÉ N°4

PSI
2020 – 2021

Samedi 12 décembre 2020

Durée : 4h00

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte un exercice et deux problèmes indépendants les uns des autres.

Exercice – Sous-espace vectoriel engendré par les puissances d'une matrice

Dans tout l'exercice, on travaille sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
   En déduire un polynôme non nul annulateur de la matrice A.
2. Étudier si la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ puis dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de A^{2k} et, pour $k \in \mathbb{N}$, une expression de A^{2k+1}.
   On pourra calculer les premières puissances de A*, émettre des conjectures et enfin les prouver.*
4. On introduit la famille $\mathscr{B} = (I_3, A, A^2)$. Démontrer que l'ensemble $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.
5. Prouver que $A^k \in F$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\theta^k}{k!} A^k$$
   Justifier que $S_n \in F$ et donner les composantes de S_n dans la base $\mathscr{B}$.
7. Démontrer que $M = \lim_{n\to+\infty} S_n$ existe.
8. Donner l'expression de M, vérifier que $M \in F$ et donner ses composantes dans la base $\mathscr{B}$.

Problème 1 – Étude d'une famille de séries de fonctions

Pour tout réel strictement positif $\alpha > 0$, on se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = 1 + e^{-x} + e^{-2^\alpha x} + e^{-3^\alpha x} + e^{-4^\alpha x} + \cdots$$

Partie I – Premières propriétés des fonctions S_α

1. On étudie tout d'abord le cas particulier de la fonction S_1.

1.1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions définissant S_1 :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn}$$

Sur l'ensemble où il y a convergence simple, donner une expression de S_1.

1.2. Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.

1.3. Préciser la limite de $S_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x) - 1$ en $+\infty$.

2. On poursuit avec l'étude du domaine de définition des fonctions S_α. Dans la suite, on fixe $\alpha > 0$.

2.1. Examiner pour $x \leqslant 0$ la nature de la série $\sum_{n \geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$.

2.2. Pour tout réel $x > 0$, déterminer la limite de la suite $(n^2 e^{-xn^\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$.
En déduire la nature de la série $\sum_{n \geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ pour $x > 0$.

2.3. Préciser le domaine de définition de la fonction S_α.

3. On étudie maintenant quelques propriétés des fonctions S_α. Dans la suite, on fixe $\alpha > 0$.

3.1. Pour tout $\varepsilon > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum e^{-xn^\alpha}$ sur $[\varepsilon, +\infty[$.
En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]0, +\infty[$.

3.2. Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0 < x \leqslant y$ et préciser le sens de variation de la fonction S_α.
En déduire que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.

3.3. Démontrer que : $\lim_{x \to +\infty} S_\alpha(x) = 1$.

3.4. Justifier que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad S_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha}$$

En déduire que, pour tout entier naturel N, on a : $\lim_{x \to 0} S_\alpha(x) \geqslant N + 1$.
Conclure quant à la valeur de la limite de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0.

Partie II – Étude de la fonction S_2.

On étudie dans cette partie la fonction définie par :

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^2} = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + e^{-9x} + e^{-16x} + \cdots$$

4. On recherche un équivalent de S_2 en 0.

4.1. Établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad e^{-x(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\,dt \leqslant e^{-xn^2}$$

4.2. Dans cette question, on **admettra** l'existence et la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{y \to +\infty} \int_0^y e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Déduire de la question précédente la double inégalité suivante :

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) - 1 \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leqslant S_2(x)$$

4.3. Retrouver alors $\lim_{x \to 0} S_2(x)$, puis donner un équivalent de $S_2(x)$ quand x tend vers 0.

5. On recherche maintenant un équivalent de $S_2 - 1$ en $+\infty$.

5.1. Établir que :

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) - 1 - e^{-x} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn}$$

5.2. En calculant cette dernière somme, démontrer que $S_2(x) = 1 + e^{-x} + \underset{x \to +\infty}{o}(e^{-x})$.
En déduire un équivalent de $S_2(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

Problème 2 – Étude des solutions d'une équation

Dans ce problème, on se donne un réel $a \in \mathbb{R}$ et on travaille sur l'équation suivante :

$$\ln x = ax \tag{E_a}$$

Partie I – Étude de l'équation (E_a)

1. On fixe, dans cette question, un réel a quelconque.

1.1. Montrer que si $a \in]-\infty, 0]$, l'équation (E_a) admet une unique solution $\alpha \in]0, 1]$.

1.2. Montrer que si $a \in]0, \frac{1}{e}[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions $\alpha \in]1, e[$ et $\beta \in]e, +\infty[$.

1.3. Montrer que si $a = \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) admet une unique solution dont on donnera la valeur.

1.4. Montrer que si $a > \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) n'admet pas de solution.

Partie II – Étude d'une suite de polynômes

On considère pour la suite de ce problème la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$P_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X+n)^{n-1}$$

2. **2.1.** Expliciter les polynômes P_1 et P_2.

2.2. Donner la valeur de $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P'_n(x) = P_{n-1}(x+1)$$

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)$$

On pourra procéder par récurrence sur n.

Partie III – Retour sur l'équation (E_a)

Dans cette partie on note α_a **la plus petite** solution, si elle existe, de l'équation (E_a).

On introduit également l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \tag{R}$$

où l'inconnue est une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$.

On **admettra** que si φ est une solution de (R) vérifiant $\varphi(0) \neq 0$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = (\varphi(1))^x$$

Ce résultat a été prouvé dans le **Devoir surveillé n°1** et on pourra s'en servir librement dans la suite.

5. **5.1.** Pour tout réel x, montrer que :

$$(x+n)^{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} e^x n^{n-1}$$

5.2. Rappeler la formule de Stirling et montrer que, pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ fixés, la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} P_n(x) a^n$ converge absolument si et seulement si $|a| \leqslant 1/e$.

6. Dans cette question on fixe un réel a de $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ et on note F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) a^n$$

6.1. Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{R}$.

6.2. Rappeler le résultat de cours sur le produit de Cauchy de deux séries.

6.3. En utilisant les résultats de la **Partie II**, montrer que F_a est solution de (R) et en déduire, grâce au résultat admis, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = (F_a(1))^x$$

6.4. Montrer que F_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a'(x) = a F_a(x+1)$$

6.5. En calculant $F_a'(0)$ de deux façons différentes, montrer que $F_a(1)$ est solution de (E_a).

7. On note G la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ par $G(a) = F_a(1)$.

7.1. Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ et monotone sur $\left[0, \frac{1}{e}\right]$.

7.2. Expliciter $G\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right)$, image de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ par la fonction G.

7.3. Conclure que :

$$\forall a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad F_a(1) = \alpha_a$$

8. Soit C un réel tel que $1 \leqslant C \leqslant e^{\frac{1}{e}}$.
Montrer que l'équation $y^y = C$, d'inconnue $y > 0$, admet une unique solution y_0 et que :

$$y_0 = 1 + \ln(C) + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} (\ln(C))^n$$