DEVOIR SURVEILLÉ n°4

Corrigé

Exercice – Sous-espace vectoriel engendré par les puissances d'une matrice

1. Le théorème de Cayley-Hamilton assure qu'une matrice est annulée par son polynôme caractéristique. Dans le cas de la matrice A, après calcul de $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$ par développement par rapport à la dernière ligne, on trouve $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda^2+1)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, $X(X^2+1)$ annule A.

2. Puisque le polynôme $X(X^2+1) = X(X-i)(X+i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et qu'il annule A, A est diagonalisable sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Le spectre réel de A est composé des racines réelles de χ_A et 0 est donc la seule valeur propre réelle de A. Or, la seule matrice réelle diagonalisable dont 0 est l'unique valeur propre est la matrice nulle. Comme $A \neq 0$, A n'est pas diagonalisable sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Après calcul des premières puissances, on conjecture que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad A^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\quad A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} & 0 \\ (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On prouve ces deux résultats par récurrence sur k. On effectue la récurrence pour le premier résultat, le second se prouvant de façon analogue.

- **Initialisation :** Pour $k = 1$, on a par un calcul direct :

$$A^{2k} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Hérédité :** On suppose le résultat vrai au rang $k \geqslant 1$ et on le prouve au rang $k+1$, en utilisant l'hypothèse de récurrence et le calcul direct de A^2 :

$$A^{2(k+1)} = A^{2k+2} = A^{2k}A^2 = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

4. L'ensemble $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ puisque c'est un sous-espace vectoriel engendré par une famille d'éléments de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. La famille $\mathscr{B}$ en est une famille génératrice et, afin de montrer que c'est une base de F, il suffit de montrer qu'elle est libre. On se donne $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $aA^2 + bA + cI_3 = 0$. Grâce aux expressions de I_3, A et A^2, cela donne :

$$\begin{pmatrix} -a+c & -b & 0 \\ b & -a+c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = 0$$

On en déduit immédiatement que $a = b = c = 0$. La famille $\mathscr{B}$ est donc libre et c'est finalement une base de F, qui est ainsi de dimension 3.

5. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Si $k = 0$, $A^k = I_3 \in F$.
- **Hérédité :** On suppose que $A^k \in F$ pour un $k \geqslant 0$ et on va prouver que $A^{k+1} \in F$. Puisque $\mathscr{B}$ est une base de F et que $A^k \in F$, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A^k = aA^2 + bA + cI_3$. On a alors $A^{k+1} = aA^3 + bA^2 + cA$. Mais la question **3** donne que $A^3 = -A$ de sorte que $A^{k+1} = bA^2 + (c-a)A \in \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2) = F$, ce que l'on souhaitait.

D'où le résultat par principe de récurrence.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice S_n étant combinaison linéaire des éléments $(A^k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ qui sont dans F d'après la question précédente, elle appartient bien à F. Pour exprimer S_n dans $\mathscr{B}$, on remarque avec la question **3** que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^{2k} = (-1)^{k-1}A^2 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{2k+1} = (-1)^k A$$

Dans la somme qui définit S_n, on particularise le terme d'indice 0 et on découpe la somme selon la parité de l'indice pour les autres termes. On obtient :

$$S_n = I_3 + \left(\sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{n-1}{2}} (-1)^j \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)A + \left(\sum_{1\leqslant j\leqslant \frac{n}{2}} (-1)^{j-1} \frac{\theta^{2j}}{(2j)!}\right)A^2$$

ce qui donne l'expression de S_n dans la base $\mathscr{B}$.

7. Pour montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge il suffit, par théorème de cours, de montrer que les suites coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ explicitées à la question précédente convergent. Or, on sait que :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sin\theta \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{\theta^{2j}}{(2j)!} = \cos\theta$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{n-1}{2}} (-1)^j \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!}\right) = \sin\theta \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant \frac{n}{2}} (-1)^{j-1} \frac{\theta^{2j}}{(2j)!}\right) = 1-\cos\theta$$

On a donc bien convergence de la suite matricielle $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

8. En passant à la limite dans la relation :

$$S_n = I_3 + \left(\sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{n-1}{2}} (-1)^j \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)A + \left(\sum_{1\leqslant j\leqslant \frac{n}{2}} (-1)^{j-1} \frac{\theta^{2j}}{(2j)!}\right)A^2$$

prouvée à la question **6**, les convergences étudiées à la question précédente donnent :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = I_3 + \sin\theta A + (1-\cos\theta)A^2$$

Ainsi la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dans $\mathrm{Vect}(I_3, A, A^2) = F$ et on vient d'en donner les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Problème 1 – Étude d'une famille de séries de fonctions

Partie I – Premières propriétés des fonctions S_α

1. **1.1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{-xn} = (e^{-x})^n$. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn}$ est une série géométrique de raison e^{-x}. Cette série converge donc si et seulement si $e^{-x} \in]-1,1[$, c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$. Ainsi la série de fonctions définissant S_1 converge simplement sur $]0,+\infty[$.

   En utilisant une somme de série géométrique, on peut expliciter $S_1(x)$ pour tout $x > 0$:

$$\forall x > 0, \quad S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

   1.2. On utilise l'équivalent classique $e^{-x} - 1 \sim (-x)$ au voisinage de 0. On obtient :

$$S_1(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

   On en déduit en particulier la limite de S_1 en 0^+ :

$$\lim_{x\to 0^+} S_1(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

1.3. Pour tout $x > 0$, on a :

$$S_1(x) - 1 = \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$$

On en déduit en particulier la limite de S_1 en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} (S_1(x) - 1) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

2. **2.1.** Soit $x \leqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-xn^\alpha \geqslant 0$ et donc $e^{-xn^\alpha} \geqslant e^0 = 1$. Ainsi la suite $(e^{-xn^\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ diverge grossièrement.

2.2. Soit $x > 0$. Par croissances comparées, on a $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-xn^\alpha} = 0$. Par comparaison à une série de Riemann convergente $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$, on obtient ainsi la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$.

2.3. Il est démontré dans les deux questions précédentes que la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ converge si $x > 0$ et diverge si $x \leqslant 0$. Ainsi la somme $S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}$ n'est définie que si $x > 0$, et la fonction S_α a pour domaine de définition $]0, +\infty[$.

3. **3.1.** Soit $\varepsilon > 0$. On commence par remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [\varepsilon, +\infty[, \quad |e^{-xn^\alpha}| = e^{-xn^\alpha} \leqslant e^{-\varepsilon n^\alpha}$$

Or la question **2.2** donne que la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-\varepsilon n^\alpha}$ converge. Ceci assure que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Prouvons ensuite que S_α est continue sur $]0, +\infty[$. On utilise pour cela le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions dont on vérifie les hypothèses :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto e^{-xn^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, b]$ d'après ce qui précède puisque $[a, b] \subset [a, +\infty[$.

Le théorème s'applique et on en déduit que la somme S_α est continue sur $]0, +\infty[$.

3.2. Soient $0 < x \leqslant y$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est décroissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que l'on a $e^{-yn^\alpha} \leqslant e^{-xn^\alpha}$. En sommant de 0 à $p \in \mathbb{N}$ ces inégalités on a :

$$\sum_{n=0}^{p} e^{-yn^\alpha} \leqslant \sum_{n=0}^{p} e^{-xn^\alpha}$$

On passe ensuite à la limite lorsque p tend vers $+\infty$ dans cette inégalité pour obtenir $S_\alpha(y) \leqslant S_\alpha(x)$. On en déduit que la fonction S_α est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Par le théorème de la limite monotone, une fonction monotone admet une limite, éventuellement infinie, en les extrémités de son domaine de définition. On en déduit que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.

3.3. On utilise le théorème de la double limite dont on vérifie les hypothèses :

- Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-xn^\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

- La question **3.1** assure que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ converge normalement et donc uniformément sur $[1, +\infty[$.

Le théorème de la double limite s'applique et donne :

$$\lim_{x\to+\infty} S_\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} e^{-xn^\alpha} = 1$$

3.4. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{-xn^\alpha} \geqslant 0$, ce qui implique :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \geqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha}$$

En passant à la limite lorsque x tend vers 0 dans cette inégalité, on obtient :

$$\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} 1 = N + 1$$

l'existence de la limite dans le membre de gauche étant donnée par la question **3.2**. Cette limite est soit finie, soit infinie. Dans le cas où elle est finie, égale à un réel ℓ, alors l'inégalité précédente avec $N = \lfloor \ell \rfloor + 1$ donne $\ell \geqslant \lfloor l \rfloor + 1$, ce qui est absurde. On en déduit que $\lim_{x\to 0} S_\alpha(x)$ est infinie. Comme S_α est une fonction positive, on conclut que $\lim_{x\to 0} S_\alpha(x) = +\infty$.

Partie II – Étude de la fonction S_2.

4. On recherche un équivalent de S_2 en 0.

4.1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. L'application $t \mapsto e^{-xt^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc en particulier sur $[n, n+1]$:

$$\forall t \in [n, n+1], \quad e^{-x(n+1)^2} \leqslant e^{-xt^2} \leqslant e^{-xn^2}$$

En intégrant cette inégalité sur $[n, n+1]$, la croissance de l'intégrale donne :

$$\int_n^{n+1} e^{-x(n+1)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} e^{-xn^2}\,\mathrm{d}t$$

Les intégrales aux extrémités de cet encadrement sont des intégrales de fonctions constantes et on obtient :

$$e^{-x(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} e^{-xt^2} \leqslant e^{-xn^2}$$

4.2. Soit $x > 0$. On fixe $p \in \mathbb{N}$. On somme l'encadrement de la question précédente de 0 à p, ce qui donne, grâce à la relation de Chasles :

$$\sum_{n=0}^{p} e^{-x(n+1)^2} \leqslant \int_0^{p+1} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{p} e^{-xn^2}$$

Sur la première somme, on réalise le changement d'indice $k = n+1$. Pour relier l'intégrale au centre de l'encadrement à l'intégrale de l'énoncé, on réalise le changement de variable affine $u = \sqrt{x}t$. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{p+1} e^{-xk^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}(p+1)} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \sum_{n=0}^{p} e^{-xn^2}$$

En passant à la limite lorsque $p \to +\infty$ dans cet encadrement et en utilisant le résultat admis par l'énoncé pour le terme central, on obtient :

$$S_2(x) - 1 \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leqslant S_2(x)$$

4.3. L'encadrement précédent peut aussi se réécrire de la façon suivante :

$$\forall x > 0, \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leqslant S_2(x) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + 1$$

On en déduit alors :

$$\forall x > 0, \quad 1 \leqslant \frac{2\sqrt{x}\,S_2(x)}{\sqrt{\pi}} \leqslant 1 + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

Les deux extrémités de cet encadrement tendent vers 1 quand x tend vers 0 de sorte que, d'après le théorème des gendarmes, on obtient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x}\,S_2(x)}{\sqrt{\pi}} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad S_2(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

On retrouve alors la limite obtenue à la question **3.4** :

$$\lim_{x\to 0^+} S_2(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

5. **5.1.** Soit $x>0$. On a $e^{-x\cdot 0^2}=1$ et $e^{-x\cdot 1^2}=e^{-x}$, donc :

$$S_2(x)-1-e^{-x}=\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^2}$$

Pour tout entier $n\geqslant 2$ on a $n^2\geqslant n$, ce qui donne $e^{-xn^2}\leqslant e^{-xn}$ puisque $x>0$ et par croissance de l'exponentielle. On en déduit alors la majoration :

$$S_2(x)-1-e^{-x}\leqslant\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn}$$

5.2. Soit $x>0$. Nous avons calculé la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn}$ dans la question **1.1**. En l'utilisant, on obtient :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn}=\frac{1}{1-e^{-x}}-(1+e^{-x})=\frac{1-(1-e^{-x})(1+e^{-x})}{1-e^{-x}}=\frac{1-(1-e^{-2x})}{1-e^{-x}}=\frac{e^{-2x}}{1-e^{-x}}$$

Avec l'inégalité de la question précédente et le fait que $S_2(x)-1-e^{-x}=\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^2}\geqslant 0$, on obtient :

$$0\leqslant e^{x}\left(S_2(x)-(1+e^{-x})\right)\leqslant\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

Les deux extrémités de cet encadrement tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et le théorème d'encadrement donne donc que $\lim_{x\to+\infty} e^{x}\left(S_2(x)-(1+e^{-x})\right)=0$. On en déduit $S_2(x)-(1+e^{-x})=o_{x\to+\infty}(e^{-x})$, ce qui se réécrit $S_2(x)=1+e^{-x}+o_{x\to+\infty}(e^{-x})$. Par définition d'un équivalent, cela donne :

$$S_2(x)-1=e^{-x}+\underset{x\to+\infty}{o}(e^{-x})\underset{x\to+\infty}{\sim}e^{-x}$$

Problème 2 – Étude des solutions d'une équation

Partie I – Étude de l'équation (E_a)

1. On introduit la fonction $f_a : x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto \ln x-ax$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x>0,\quad f_a'(x)=\frac{1}{x}-a$$

1.1. Si $a\in]-\infty,0]$, on a $f_a'(x)>0$ pour tout $x>0$ et le tableau de variations de f_a est :

x	0	$+\infty$
$f_a(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Ainsi f_a est continue et strictement croissante (car $f_a'>0$) sur $\mathbb{R}_+^*$ de sorte que, par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f_a(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}$. Or $0\in\mathbb{R}$, donc $(E_a)\iff f_a(x)=0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, notée α. De plus, $f_a(1)=-a\geqslant 0=f_a(\alpha)$, ce qui donne $\alpha\geqslant 1$ par croissance de f_a sur $\mathbb{R}_+^*$. Finalement, on a bien $\alpha\in]0,1]$.

1.2. Si $a\in]0,\frac{1}{e}[$, on a, pour $x>0$, les équivalences :

$$f_a'(x)>0\iff\frac{1}{x}-a>0\iff x<\frac{1}{a}$$

Le tableau de variations de f_a est donc :

x	0		$1/a$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_a(1/a)$	$\searrow$	$-\infty$

avec $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)=-\infty$ par croissances comparées.

- Ainsi f_a est continue et strictement croissante sur $]0,1/a]$, donc elle réalise une bijection de $]0,1/a]$ sur $f_a(]0,1/a])=]-\infty,f_a(1/a)]$. Or on remarque que l'on a $0\in]-\infty,f_a(1/a)]$ puisque $f_a(1/a)>0$. En effet $f_a(1/a)=-\ln a-1>0$ puisque $a<1/e$. On conclut que $(\mathrm{E}_a) \iff f_a(x)=0$ a une unique solution sur $]0,1/a]$, notée α. Enfin, $\alpha\leqslant 1/a<e$ et $f_a(1)=-a>0=f_a(\alpha)$, ce qui donne $\alpha>1$ par stricte croissance de f_a sur $]0,1/a]$. Finalement, on a bien $\alpha\in]1,e[$.
- De plus, f_a est continue et strictement décroissante sur $]1/a,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]1/a,+\infty[$ sur $f_a(]1/a,+\infty[)=]-\infty,f_a(1/a)[$. Or on remarque que $0\in]-\infty,f_a(1/a)[$ car $f_a(1/a)>0$ donc $(\mathrm{E}_a) \iff f_a(x)=0$ a une unique solution sur $]1/a,+\infty[$, notée β. Comme $f_a(e)=1-ae>0=f_a(\beta)$, on obtient $e<\beta$ par stricte décroissante de f_a sur $]1/a,+\infty[$. Finalement, on a bien $\beta\in]e,+\infty[$.

1.3. Si $a=\frac{1}{e}$, on a le même tableau de variations qu'à la question précédente, avec $f_a(1/a)=f_{1/e}(e)=\ln(e)-1=0$, de sorte que l'équation $(\mathrm{E}_{1/e})$ a une unique solution donnée par $x=e$.

1.4. Si $a>\frac{1}{e}$, on a le même tableau de variations qu'à la question **1.2** avec $f_a(1/a)=-\ln(a)-1<0$. On en déduit que $f_a(x)\leqslant f_a(1/a)<0$ pour tout $x>0$, et l'équation (E_a) n'a donc aucune solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II – Étude d'une suite de polynômes

On considère pour la suite de ce problème la suite de polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\mathrm{P}_0=1 \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{P}_n(\mathrm{X})=\frac{1}{n!}\mathrm{X}(\mathrm{X}+n)^{n-1}$$

2. 2.1. On a immédiatement :

$$\mathrm{P}_1=\frac{1}{1!}\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)^0=\mathrm{X} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_2=\frac{1}{2!}\mathrm{X}(\mathrm{X}+2)^1=\frac{1}{2}\mathrm{X}^2+\mathrm{X}$$

2.2. On a $\mathrm{P}_0(0)=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{P}_n(0)=\frac{1}{n!}0(0+n)^{n-1}=0$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n'(x)&=\frac{1}{n!}\left((x+n)^{n-1}+(n-1)x(x+n)^{n-2}\right)=\frac{1}{n!}(x+n)^{n-2}(x+n+(n-1)x)\\&=\frac{1}{n!}(x+n)^{n-2}n(x+1)=\frac{1}{(n-1)!}(x+1)(x+n)^{n-2}\\&=\frac{1}{(n-1)!}(x+1)(x+1+n-1)^{n-2}=\mathrm{P}_{n-1}(x+1)\end{aligned}$$

4. Montrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \mathrm{P}_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_{n-k}(y) \tag{HR_n}$$

- **Initialisation :** Pour $n=0$, comme $\mathrm{P}_0=1$, on a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{P}_0(x+y)=1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{0}\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_{0-k}(y)=\mathrm{P}_0(x)\mathrm{P}_0(y)=1\times1=1$$

  de sorte que (HR_0) est bien vérifiée.
- **Hérédité :** On suppose (HR_n) vérifiée pour un $n\in\mathbb{N}$. Alors, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on écrit grâce au théorème fondamental de l'analyse appliqué à la fonction $u\mapsto\mathrm{P}_{n+1}(u)$ de classe $\mathscr{C}^1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{n+1}(x+y)-\mathrm{P}_{n+1}(y)&=\int_y^{x+y}\mathrm{P}_{n+1}'(u)\,\mathrm{d}u\\&=\int_y^{x+y}\mathrm{P}_n(u+1)\,\mathrm{d}u \qquad (\text{d'après } \mathbf{3})\\&=\int_0^x\mathrm{P}_n(t+1+y)\,\mathrm{d}t \qquad (\text{changement de variable affine } t=u-y)\\&=\int_0^x\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}_k(t+1)\mathrm{P}_{n-k}(y)\,\mathrm{d}t \qquad (\text{d'après } (\mathrm{HR}_n))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{P}_{n-k}(y)\int_0^x \mathrm{P}_k(t+1)\,\mathrm{d}t\right) \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{P}_{n-k}(y)\int_0^x \mathrm{P}'_{k+1}(t)\,\mathrm{d}t\right) \qquad \text{(d'après } \mathbf{3}\text{)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{P}_{n-k}(y)\,[\mathrm{P}_{k+1}(t)]_0^x\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{P}_{n-k}(y)(\mathrm{P}_{k+1}(x)-\mathrm{P}_{k+1}(0))\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{P}_{n-k}(y)\mathrm{P}_{k+1}(x)\right) \qquad \text{(d'après } \mathbf{2.2}\text{)}\\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \mathrm{P}_j(x)\mathrm{P}_{n+1-j}(y) \qquad \text{(en posant } j=k+1\text{)}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{P}_{n+1}(x+y) = \mathrm{P}_{n+1}(y) + \sum_{j=1}^{n+1} \mathrm{P}_j(x)\mathrm{P}_{n+1-j}(y) = \sum_{j=0}^{n+1} \mathrm{P}_j(x)\mathrm{P}_{n+1-j}(y)$$

c'est-à-dire (HR_{n+1}).

D'où le résultat par principe de récurrence.

Partie III – Retour sur l'équation (E_a)

5. 5.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant -x$, on écrit :

$$\begin{aligned}
(x+n)^{n-1} &= n^{n-1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} = n^{n-1}\exp\left((n-1)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\\
&= n^{n-1}\exp\left((n-1)\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = n^{n-1}\underbrace{\exp(x+o(1))}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} e^x n^{n-1}
\end{aligned}$$

5.2. D'après le cours, la formule de Stirling est :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ fixés. On a, grâce à la question précédente et la formule de Stirling :

$$|\mathrm{P}_n(x)a^n| = \frac{1}{n!}|x||x+n|^{n-1}|a|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}|x|e^x n^{n-1}|a|^n = \frac{e^n|x|e^x|a|^n}{n\sqrt{2\pi n}} = \frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{(e|a|)^n}{n^{3/2}}$$

- Si $|a| \leqslant \frac{1}{e}$, alors on écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{(e|a|)^n}{n^{3/2}} \leqslant \frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{3/2}}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^{3/2}$ étant une série de Riemann convergente, le théorème de comparaison des séries à termes positifs appliqué deux fois de suite donne que $\sum_{n\geqslant 1}[|x|e^x(e|a|)^n]/[\sqrt{2\pi}n^{3/2}]$ puis $\sum_{n\geqslant 0}|\mathrm{P}_n(x)a^n|$ convergent. Ainsi $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{P}_n(x)a^n$ converge absolument.
- Si $|a| > \frac{1}{e}$, alors, par croissances comparées :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{(e|a|)^n}{n^{3/2}} = +\infty$$

donc $\sum_{n\geqslant 1}[|x|e^x(e|a|)^n]/[\sqrt{2\pi}n^{3/2}]$ diverge grossièrement, ce qui donne, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, que $\sum_{n\geqslant 0}|\mathrm{P}_n(x)a^n|$ diverge. Ainsi $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{P}_n(x)a^n$ ne converge pas absolument.

On a donc bien établi que $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{P}_n(x)a^n$ converge absolument si et seulement si $|a| \leqslant \frac{1}{e}$.

6. 6.1. On va utiliser le théorème de continuité d'une somme de série de fonctions, dont on vérifie les hypothèses :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n : x \mapsto \mathrm{P}_n(x)a^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.
- Pour tout $b > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [-b, b]$, on a :

$$|u_n(x)| = \frac{1}{n!}|x| \cdot |x+n|^{n-1}|a|^n \leqslant \frac{1}{n!}b(b+n)^{n-1}|a|^n = \mathrm{P}_n(b)|a|^n$$

Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{P}_n(b)|a|^n$ converge d'après la question précédente puisque $|a| \leqslant 1/e$, on obtient que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[-b, b]$. Ceci prouve la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur tout segment de $\mathbb{R}$ puisque tout segment de $\mathbb{R}$ peut être inclus dans un segment $[-b, b]$ avec $b > 0$.

Le théorème s'applique et donne que la somme F_a est continue sur $\mathbb{R}$.

6.2. Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

6.3. On vérifie que F_a vérifie l'équation fonctionnelle (R) :

- La fonction F_a est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question **6.1**.
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$, comme les séries définissant $\mathrm{F}_a(x)$ et $\mathrm{F}_a(y)$ convergent absolument d'après **5.2**, on peut écrire en utilisant le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_a(x)\mathrm{F}_a(y) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}_n(x)a^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}_n(y)a^n\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_k(x)a^k \mathrm{P}_{n-k}(y)a^{n-k}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_{n-k}(y)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}_n(x+y)a^n \qquad \text{(d'après } \mathbf{4}\text{)}\\
&= \mathrm{F}_a(x+y)
\end{aligned}$$

La fonction F_a est donc bien solution de (R) et, par suite, d'après le résultat admis par l'énoncé, étant donné que $\mathrm{F}_a(0) = \mathrm{P}_0(0)a^0 = 1 \neq 0$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_a(x) = (\mathrm{F}_a(1))^x$$

6.4. On va utiliser le théorème de dérivation d'une somme de série de fonctions, dont on vérifie les hypothèses :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_n : x \mapsto \mathrm{P}_n(x)a^n$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.
- La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ d'après **5.2**.
- Pour tout $b > 0$, pour tout $n \geqslant 2$ et pour tout $x \in [-b, b]$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_n'(x)| = |\mathrm{P}_n'(x)a^n| = |\mathrm{P}_{n-1}(x+1)a^n| &= \frac{1}{(n-1)!}|x+1||x+1+n-1|^{n-2}|a|^n\\
&\leqslant \frac{1}{(n-1)!}(b+1)(b+1+n-1)^{n-2}|a|^n = |a|\mathrm{P}_{n-1}(b)|a|^{n-1}
\end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_{n\geqslant 2} \mathrm{P}_{n-1}(b)|a|^{n-1}$ converge d'après la question **5.2** puisque $|a| \leqslant 1/e$, on obtient que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n'$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[-b, b]$. Ceci prouve la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} u_n'$ sur tout segment de $\mathbb{R}$ puisque tout segment de $\mathbb{R}$ peut être inclus dans un segment $[-b, b]$ avec $b > 0$.

Le théorème s'applique et donne que la somme F_a est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_a'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}_n'(x)a^n = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}_{n-1}(x+1)a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}_n(x+1)a^{n+1} = a\mathrm{F}_a(x+1)$$

6.5. D'après la question précédente, on a $\mathrm{F}_a'(0) = a\mathrm{F}_a(1)$. De plus, en dérivant cette fois-ci F_a à partir de l'expression obtenue à la question **6.3**, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_a'(x) = \big(\exp(x\ln(\mathrm{F}_a(1)))\big)' = \ln(\mathrm{F}_a(1))\exp(x\ln(\mathrm{F}_a(1))) = \ln(\mathrm{F}_a(1))\mathrm{F}_a(x)$$

de sorte que, en appliquant en 0, on a aussi $\mathrm{F}_a'(0) = \ln(\mathrm{F}_a(1))\mathrm{F}_a(0) = \ln(\mathrm{F}_a(1))$. On a donc démontré que $\ln(\mathrm{F}_a(1)) = \mathrm{F}_a'(0) = a\mathrm{F}_a(1)$, c'est-à-dire que $\mathrm{F}_a(1)$ est solution de (E_a).

7. **7.1.** La fonction $\mathrm{G} : a \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}_n(1) a^n$ est la somme d'une série entière. D'après l'étude faite en **5.2**, elle converge absolument si et seulement si $a \in [-1/e, 1/e]$, ce qui assure que son rayon de convergence est $1/e$. Par suite G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{P}_n(1) \geqslant 0$. De plus, si $a, b \in [0, 1/e]$ avec $a \leqslant b$, on a $a^n \leqslant b^n$ et donc $\mathrm{P}_n(1) a^n \leqslant \mathrm{P}_n(1) b^n$ pour tout $n \geqslant 0$. En sommant ces inégalités pour tout $n \in \mathbb{N}$, étant donné que les deux séries convergent, on obtient :

$$\mathrm{G}(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}_n(1) a^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}_n(1) b^n = \mathrm{G}(b)$$

La fonction G est donc bien monotone (croissante plus précisément) sur $[0, 1/e]$.

7.2. D'une part on a $\mathrm{G}(0) = \mathrm{F}_0(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}_n(1) 0^n = \mathrm{P}_0(1) = 1$. D'autre part, $\mathrm{G}(1/e) = \mathrm{F}_{1/e}(1)$ est solution de $(\mathrm{E}_{1/e})$. Or d'après **1.3**, $(\mathrm{E}_{1/e})$ admet e comme unique solution donc $\mathrm{G}(1/e) = e$. Comme G est continue et croissante sur $[0, 1/e]$, on conclut que :

$$\mathrm{G}\left(\left[0, \tfrac{1}{e}\right]\right) = [\mathrm{G}(0), \mathrm{G}(1/e)] = [1, e]$$

7.3. On effectue une disjonction de cas.

- Si $a \in [-1/e, 0]$, d'après **1.1**, (E_a) a une unique solution, α_a, donc, comme $\mathrm{G}(a) = \mathrm{F}_a(1)$ est solution de (E_a), on a $\mathrm{G}(a) = \alpha_a$.
- Si $a \in [0, 1/e]$, d'après **1.2**, (E_a) a deux solutions $\alpha_a < e$ et $\beta > e$. Comme $\mathrm{G}(a) = \mathrm{F}_a(1)$ est solution de (E_a) et que $\mathrm{G}(a) \in [1, e]$ d'après la question précédente, on obtient $\mathrm{G}(a) = \alpha_a$.

On a donc bien :

$$\forall a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad \mathrm{F}_a(1) = \alpha_a$$

8. Pour tout $y > 0$, on écrit :

$$\begin{aligned} y^y = \mathrm{C} \iff \exp(y \ln(y)) = \mathrm{C} \iff y \ln y = \ln \mathrm{C} \iff \ln(y) = \frac{\ln \mathrm{C}}{y} &\iff \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(\mathrm{C}) \frac{1}{y} \\ &\iff \frac{1}{y} \text{ solution de } \mathrm{E}_{-\ln(\mathrm{C})} \end{aligned}$$

Puisque $1 \leqslant \mathrm{C} \leqslant e^{\frac{1}{e}}$, on obtient $0 \leqslant \ln(\mathrm{C}) \leqslant 1/e$ soit $-\ln(\mathrm{C}) \in [-1/e, 0]$. Dans ce cas, $(\mathrm{E}_{-\ln \mathrm{C}})$ a une unique solution donnée par $\alpha_{-\ln \mathrm{C}} = \mathrm{F}_{-\ln(\mathrm{C})}(1)$. L'équation $y^y = \mathrm{C}$ a donc une unique solution $y_0 = (\mathrm{F}_{-\ln(\mathrm{C})}(1))^{-1}$. Comme $\mathrm{F}_{-\ln(\mathrm{C})}$ vérifie (R) d'après **6.3**, on a :

$$\mathrm{F}_{-\ln(\mathrm{C})}(1) \mathrm{F}_{-\ln(\mathrm{C})}(-1) = \mathrm{F}_{-\ln(\mathrm{C})}(0) = 1 \iff (\mathrm{F}_{-\ln(\mathrm{C})}(1))^{-1} = \mathrm{F}_{-\ln(\mathrm{C})}(-1)$$

On peut donc conclure que :

$$\begin{aligned} y_0 = (\mathrm{F}_{-\ln(\mathrm{C})}(1))^{-1} = \mathrm{F}_{-\ln \mathrm{C}}(-1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}_n(-1)(-\ln \mathrm{C})^n \\ &= \mathrm{P}_0(-1) + \mathrm{P}_1(-1)(-\ln \mathrm{C}) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)(-1+n)^{n-1}(-\ln \mathrm{C})^n \\ &= 1 + \ln \mathrm{C} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} (\ln \mathrm{C})^n \end{aligned}$$