DEVOIR À LA MAISON N°6

Corrigé

Exercice – Diverses expressions de $\ln(2)$

1. D'après le cours, la fonction définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 1 et :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

2. Dans l'identité précédente, on choisit $x = -1/2 \in]-1,1[$ et il vient :

$$\ln(2) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$$

3. **3.1.** Si $x \neq 0$, en notant $a_k = x^{k+1}/(k(k+1))$ pour $k \geqslant 1$, on a immédiatement :

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{k}{k+2}|x| \xrightarrow[k\to+\infty]{} |x|$$

Ainsi, en appliquant le critère de d'Alembert, on peut conclure que le rayon de convergence de la série entière étudiée est 1. On écrit ensuite :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

ce qui implique :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = x\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

En changeant x en $-x$ dans l'identité de la question **1**, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

On conclut finalement que, si $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(x\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) \\
&= x\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= x(-\ln(1-x)) - \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{x^p}{p} \\
&= x(-\ln(1-x)) - (-\ln(1-x) - x) = (1-x)\ln(1-x) + x
\end{aligned}$$

3.2. Pour $x = 1/2 \in]-1,1[$, la question précédente donne :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)2^{k+1}} = 2\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) = 1 - \ln(2)$$

4. **4.1.** La série alternée $\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}/k$ est convergente d'après le théorème spécial des séries alternées puisque la valeur absolue de son terme général $|(-1)^{k-1}/k| = 1/k$ est le terme général d'une suite décroissante qui tend vers 0.

4.2. Pour $x \in [0,1]$, la série alternée $\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}x^k/k$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées puisque la valeur absolue de son terme général $|(-1)^{k-1}x^k/k| = x^k/k$ est le terme général d'une suite décroissante qui tend vers 0. En appliquant le résultat relatif à la majoration du reste du théorème spécial des séries alternées, il vient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\right| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

4.3. Le résultat de la question précédente prouve que la série de fonction $\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}x^k/k$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$. De plus, pour tout $k \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto (-1)^{k-1}x^k/k$ est continue sur $[0,1]$. On en déduit par théorème de continuité d'une somme de série de fonction que la fonction S définie par :

$$\forall x \in [0,1],\quad \mathrm{S}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

est continue sur $[0,1]$. D'après la question **1**, on a $\mathrm{S}(x) = \ln(1+x)$ si $x \in [0,1[$. Ainsi, par continuité de S en 1, on obtient :

$$\ln(2) = \lim_{x\to 1^-}\ln(1+x) = \lim_{x\to 1^-}\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(1) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Problème – Étude d'une intégrale semi-convergente

Partie I — Convergence de I

1. **1.1.** La fonction φ est continue sur $]0,1]$ et de limite 1 en 0 puisque $\sin t \sim t$ au voisinage de 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$.

1.2. Une intégration par parties donne, pour $x > 1$:

$$\phi(x) = \int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \sin(t)\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

1.3. On étudie les termes de l'égalité démontrée à la question précédente.

- D'une part, on a :

$$\left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

ce qui assure par encadrement que le terme $\cos(x)/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

- D'autre part, on a :

$$\forall t \geqslant 1,\quad \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Comme la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ d'après les intégrales de référence de Riemann, le théorème de comparaison donne que la fonction $t \mapsto \cos(t)/t^2$ est elle aussi intégrable sur $[1,+\infty[$. En particulier, l'intégrale associée est convergente, ce qui donne :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

On peut donc finalement écrire que :

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x) = \cos(1) - \int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

1.4. D'après la question **1.1**, l'intégrale de φ sur $[0,1]$ est définie en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Pour tout $x > 0$, la relation de Chasles donne :

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \phi(x)$$

Le terme de droite admettant une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ d'après la question précédente, on conclut que l'intégrale I est convergente.

Partie II — Valeur de I

2. **2.1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions :

$$f_n : t \mapsto \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)} \qquad \text{et} \qquad g_n : t \mapsto \frac{\sin(2nt)}{t}$$

sont continues sur $]0, \pi/2]$. De plus, étant donné que $\sin t \sim t$ et $\cos t \sim 1$ au voisinage de 0, on obtient :

$$f_n(t) = \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)} \underset{t\to 0}{\sim} 2n \qquad \text{et} \qquad g_n(t) = \frac{\sin(2nt)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 2n$$

Ainsi f_n et g_n sont prolongeables par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 2n$ et $g_n(0) = 2n$. Ce sont donc des fonctions continues et donc intégrables sur le segment $[0, \pi/2]$. Ainsi u_n et v_n existent bien.

2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule de trigonométrie :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

nous permet d'écrire :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)[\sin((2n+2)t) - \sin(2nt)]}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

La formule de trigonométrie :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad 2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

donne alors :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos((2n+2)t) + \cos(2nt))\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin((2n+2)t)}{(2n+2)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc constante et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

3. Une intégration par parties donne, pour $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{H}_m = \int_\alpha^\beta h(t)e^{imt}\,\mathrm{d}t = \left[h(t)\frac{e^{imt}}{im}\right]_\alpha^\beta - \frac{1}{im}\int_\alpha^\beta h'(t)e^{imt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{im}(h(\beta)e^{im\beta} - h(\alpha)e^{im\alpha}) - \frac{1}{im}\int_\alpha^\beta h'(t)e^{imt}\,\mathrm{d}t$$

D'une part, on a, pour $m \in \mathbb{N}^*$, par inégalité triangulaire :

$$\left|\frac{1}{im}(h(\beta)e^{im\beta} - h(\alpha)e^{im\alpha})\right| = \frac{1}{m}\left|h(\beta)e^{im\beta} - h(\alpha)e^{im\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{m}(|h(\beta)| + |h(\alpha)|) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

D'autre part, la fonction h étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, sa dérivée h' est continue sur $[\alpha, \beta]$ et donc bornée, disons par une constante $\mathrm{C} \geqslant 0$. Ainsi, on a, par inégalité triangulaire :

$$\left|\frac{1}{im}\int_\alpha^\beta h'(t)e^{imt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{m}\int_\alpha^\beta |h'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(\beta-\alpha)\mathrm{C}}{m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

Finalement, on a prouvé que H_m est la somme de deux termes qui tendent vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$, on en déduit que $\lim_{m\to+\infty} \mathrm{H}_m = 0$.

4. La fonction h est continue sur $[0,\pi/2]$ et, par développement limité :

$$h(t) = \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{t\sin(t)} = \frac{(t + o(t^2)) - (t + o(t^2))}{t^2 + o(t^2)} = \frac{o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

On en déduit que $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$ et h est prolongeable par continuité sur $[0,\pi/2]$ en posant $h(0) = 0$. On a alors une fonction continue sur $[0,\pi/2]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi/2]$ avec :

$$\forall t > 0, \quad h'(t) = \frac{t^2 - \sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)} = \frac{(t - \sin(t))(t + \sin(t))}{t^2\sin^2(t)} = \frac{(t - \sin(t))(2t + o(t^2))}{t^2\sin^2(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(t^3/6)(2t)}{t^4} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{3}$$

Par le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$ avec $h'(0) = 1/3$.

5. **5.1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que :

$$v_n - u_n = \int_0^{\pi/2} h(t)\sin(2nt)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi/2} h(t)e^{2int}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}(\mathrm{H}_{2n}) \quad \text{où} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{H}_m = \int_0^{\pi/2} h(t)e^{imt}\,\mathrm{d}t$$

D'après la question **3**, on peut affirmer que $\lim_{m\to+\infty} \mathrm{H}_m = 0$. Par propriété sur les suites extraites, cela donne aussi $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}_{2n} = 0$. Cela permet de conclure, étant donné que la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto \mathrm{Im}(z)$ est continue, que $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

5.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $x = 2nt$ dans l'intégrale définissant v_n donne :

$$v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

L'intégrale I étant convergente d'après la question **1**, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers I lorsque n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, étant donné que l'on a $u_n = v_n + (u_n - v_n)$ pour tout $n \geqslant 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers I d'après la question précédente. Mais, d'après la question **2.2**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à $\pi/2$ et converge donc aussi vers $\pi/2$. Par unicité de la limite, il vient :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Partie III — Calcul d'une dernière intégrale

6. La fonction $t \mapsto \sin^2(t)/t^2$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1 grâce à l'équivalent $\sin t \sim t$ en 0. Il reste à étudier l'intégrabilité de cette fonction au voisinage de $+\infty$. Or :

$$\forall t > 0, \quad \left|\frac{\sin^2(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

et le théorème de comparaison permet d'obtenir l'intégrabilité de la fonction étudiée au voisinage de $+\infty$ étant donné que la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. En conclusion, la fonction $t \mapsto \sin^2(t)/t^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et son intégrale, c'est-à-dire J, est convergente.

7. Par une intégration par parties similaire à celle de la question **1.2**, on a, en primitivant sin en $1 - \cos$:

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1 - \cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

On peut alors justifier dans cette égalité un passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$, avec le même type d'arguments qu'à la question **1.3**, et obtenir :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

8. En posant $t = 2x$ dans l'intégrale convergente de droite de la relation précédente, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{4x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{J}$$

Avec l'identité de la question précédente, on en déduit finalement que $\mathrm{J} = \mathrm{I} = \pi/2$.

DEVOIR À LA MAISON N°6*

Partie I — Étude du nombre de partitions

1. Pour former une partition de $[\![1,n]\!]$ en k parties on doit associer à chaque entier de 1 à n l'une des k parties. Il y a donc au maximum k^n partitions en k parties de $[\![1,n]\!]$.

2. **2.1.** On observe qu'il ne peut pas y avoir plus de n parties non vides disjointes pour un ensemble à n éléments donc $S(n,k)=0$ si $k>n$.

2.2. On remarque qu'il n'y a qu'une façon de former une partition à une partie, obtenue en prenant l'ensemble lui-même, donc $S(n,1)=1$ si $n>0$.

3. On fixe k et n deux entiers strictement positifs. On va dénombrer les partitions de $[\![1,n]\!]$ en k parties.

- Si l'une des parties est $\{n\}$, il reste à former $k-1$ parties avec les éléments de $[\![1,n-1]\!]$ donc $S(n-1,k-1)$ possibilités.
- Sinon, n est dans une partie qui n'est pas un singleton. Si on supprime n, on obtient une partition de $[\![1,n-1]\!]$ en k parties. Réciproquement, si on complète une partition de $[\![1,n-1]\!]$ en k parties en ajoutant n à l'une des parties, on obtient une partition de $[\![1,n]\!]$ en k parties telle que n n'est pas dans un singleton. Comme il y a k possibilités pour le choix de la partie à laquelle on ajoute n, le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$ en k parties telles que n n'est pas dans un singleton est égal à $kS(n-1,k)$.

Finalement, l'ensemble des partitions de $[\![1,n]\!]$ en k parties étant l'union disjointe des partitions dont $\{n\}$ fait partie et des partitions dont n est dans une partie qui n'est pas un singleton, il vient en terme de cardinal :

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$$

Partie II — Les nombres de Bell

4. L'ensemble des partitions de $[\![1,n]\!]$ est l'union disjointe des ensembles des partitions de $[\![1,n]\!]$ en k parties pour k variant de 0 à n. En terme de cardinal, cela donne que le nombre total de partitions de $[\![1,n]\!]$ est la somme des $S(n,k)$ pour k variant de 0 à n, ce que l'on souhaitait.

5. Pour former une partition de $[\![1,n+1]\!]$, on peut :

- Commencer par choisir la partie contenant $n+1$. Pour cela on doit compléter $\{n+1\}$ par une partie de $[\![1,n]\!]$ qui possède k éléments avec $k\in[\![0,n]\!]$. L'entier $k\in[\![0,n]\!]$ étant fixé, il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir une telle partie.
- Ce choix étant fait, il reste à compléter la partie contenant $n+1$ par une partition des $n-k$ éléments de $[\![1,n]\!]$ qui n'ont pas été choisis, il y a B_{n-k} telles partitions.

Pour chaque $k\in[\![0,n]\!]$, il y a donc $\binom{n}{k}B_{n-k}$ partitions de $[\![1,n+1]\!]$ telles que $n+1$ est dans une partie comportant $k+1$ éléments. On en déduit, avec un changement de variable $k\mapsto n-k$ et par propriété des coefficients binomiaux :

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}B_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

6. Montrons par récurrence forte que $B_n\leqslant n!$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a $B_0=1\leqslant 1=0!$.
- **Hérédité :** Supposons $B_k\leqslant k!$ pour $0\leqslant k\leqslant n$ avec $n\geqslant 0$. On en déduit avec la formule de la question précédente :

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\leqslant\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\leqslant\sum_{k=0}^{n}n!=(n+1)!$$

Par principe de récurrence, on a le résultat souhaité. Cela prouve que la suite $(\mathrm{B}_n/n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

7. La question précédente donne que la suite $(\mathrm{B}_n r^n/n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée pour $r=1$, ce qui implique que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{B}_n z^n/n!$ est au moins égal à 1.

8. La somme f de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{B}_n x^n/n!$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ et on obtient sa dérivée par dérivation terme à terme :

$$\forall x\in\,]-\mathrm{R},\mathrm{R}[,\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{B}_n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{B}_{n+1}}{n!}x^n$$

Par ailleurs, la fonction exponentielle est la somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$. Par produit de Cauchy des séries entières définissant f et exp, il vient :

$$\forall x\in\,]-\mathrm{R},\mathrm{R}[,\quad e^x f(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{B}_n}{n!}x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^n$$

où les coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du produit de Cauchy sont donnés par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{B}_k}{k!}\,\frac{1}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{B}_k=\frac{\mathrm{B}_{n+1}}{n!}$$

où l'on a utilisé la question **5**. On conclut enfin que :

$$\forall x\in\,]-\mathrm{R},\mathrm{R}[,\quad f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{B}_{n+1}}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^n=e^x f(x)$$

9. La question précédente prouve que f est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y'=e^x y$ sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$. Par résolution de cette dernière, on en déduit que l'on peut écrire $f(x)=\lambda e^{e^x}$ pour tout $x\in\,]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. De plus, on a $f(0)=1=\lambda e$ donc $f(x)=e^{e^x-1}$ pour tout $x\in\,]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$.

Partie III — Étude d'une suite de polynômes

10. La famille $(\mathrm{H}_0,\dots,\mathrm{H}_n)$ est libre dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ puisque constituée de polynômes nons nuls de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et de degrés échelonnés. La famille étant de cardinal $n+1$ qui est la dimension de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, la famille est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

11. Pour $k\in\mathbb{N}$, on a $\mathrm{H}_{k+1}(\mathrm{X})=(\mathrm{X}-k)\mathrm{H}_k(\mathrm{X})$, ce qui donne $\mathrm{H}_{k+1}(\mathrm{X})+k\mathrm{H}_k(\mathrm{X})=\mathrm{X}\mathrm{H}_k(\mathrm{X})$.

12. On prouve le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Si $n=0$, on a $\mathrm{X}^0=1=\mathrm{S}(0,0)\mathrm{H}_0(\mathrm{X})$.
- **Hérédité :** Supposons la propriété vraie pour un rang $n\geqslant 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}\mathrm{S}(n+1,k)\mathrm{H}_k(\mathrm{X})&=\sum_{k=1}^{n+1}(\mathrm{S}(n,k-1)+k\mathrm{S}(n,k))\mathrm{H}_k(\mathrm{X})\qquad(\mathrm{S}(n+1,0)=0\text{ et question }\mathbf{3})\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{S}(n,k-1)\mathrm{H}_k(\mathrm{X})+\sum_{k=1}^{n+1}k\mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k(\mathrm{X})\\
&=\sum_{\ell=0}^{n}\mathrm{S}(n,\ell)\mathrm{H}_{\ell+1}(\mathrm{X})+\sum_{k=1}^{n+1}k\mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k(\mathrm{X})\qquad(\ell=k-1)\\
&=\sum_{\ell=0}^{n}\mathrm{S}(n,\ell)\mathrm{H}_{\ell+1}(\mathrm{X})+\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k(\mathrm{X})\qquad(\mathrm{S}(n,n+1)=0)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{S}(n,k)(\mathrm{H}_{k+1}(\mathrm{X})+k\mathrm{H}_k(\mathrm{X}))\\
&=\mathrm{X}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k(\mathrm{X})=\mathrm{X}^{n+1}\qquad(\text{question }\mathbf{11}\text{ et hypothèse de récurrence})
\end{aligned}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

13. 13.1. On a $0\leqslant\mathrm{S}(n,k)\leqslant\mathrm{B}_n\leqslant n!$ pour tout $n\geqslant k$ par définition de B_n et par la question **6**. Cela donne que la suite $(\mathrm{S}(n,k)/n!)_{n\geqslant k}$ est bornée et donc que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant k}\mathrm{S}(n,k)x^n/n!$ est au moins égal à 1. Ainsi f_k est (au moins) définie sur $]-1,1[$.

13.2. Pour $k \geqslant 1$, la fonction g_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k'(x) = \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!}e^x = \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!}(1+(e^x-1)) = \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(e^x-1)^{k}}{(k-1)!} = \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!} + kg_k(x)$$

On a bien prouvé que g_k satisfait l'équation différentielle annoncée.

13.3. Montrons $f_k = g_k$ sur $]-1,1[$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Pour $k=0$, on a $g_0 = 1$ et $f_0 = 1$ puisque $\mathrm{S}(0,0) = 1$ et $\mathrm{S}(n,0) = 0$ pour $n \geqslant 1$.
- **Hérédité :** On suppose $f_{k-1} = g_{k-1}$ sur $]-1,1[$ pour un $k \geqslant 1$. La série entière définissant f_k est de rayon supérieur à 1, sa somme f_k est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et on obtient sa dérivée par dérivation terme à terme :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_k'(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=k-1}^{+\infty} \mathrm{S}(n+1,k)\frac{x^n}{n!}$$

Avec la question **3**, le fait que $\mathrm{S}(k-1,k) = 0$ si $k \geqslant 1$ et l'hypothèse de récurrence, il vient alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad f_k'(x) &= \sum_{n=k-1}^{+\infty} (\mathrm{S}(n,k-1) + k\mathrm{S}(n,k))\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=k-1}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k-1)\frac{x^n}{n!} + k\sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{S}(n,k)\frac{x^n}{n!} \\ &= f_{k-1}(x) + kf_k(x) = g_{k-1}(x) + f_k(x)\end{aligned}$$

Ainsi f_k vérifie l'équation différentielle différentielle de la question **13.2** sur $]-1,1[$. Comme on a de plus $f_k(0) = 0 = g_k(0)$, on déduit par unicité de la solution d'une équation différentielle linéaire résolue d'ordre 1 vérifiant une condition initiale (théorème de Cauchy) que $f_k = g_k$ sur $]-1,1[$.

D'où le résultat par principe de récurrence.

14. Soient $x \in]-1,1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ donne, pour $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{H}_k(\alpha)\frac{x^k}{k!}$$

15. Soit $u < \ln 2$. On a alors $x = e^u - 1 \in]-1,1[$. Ainsi, on peut écrire :

$$e^{u\alpha} = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{H}_k(\alpha)\frac{(e^u-1)^k}{k!}$$