Lycée Descartes
Tours

# ESPACES PRÉHILBERTIENS

PSI
2020 – 2021

T.D. N°10

## Exercice 1 ●○○ *Distance et projection orthogonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant :

$$\forall \mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (\mathrm{M} \mid \mathrm{N}) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{M}\mathrm{N})$$

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices antisymétriques $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On définit la matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

   Déterminer la distance $d(\mathrm{M}, \mathrm{S}_3(\mathbb{R}))$ de M à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$.
3. De façon plus générale, si $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer la distance $d(\mathrm{M}, \mathrm{S}_n(\mathbb{R}))$ en fonction de M.

## Exercice 2 ●○○ *Détermination d'une base orthonormale*

On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et on fixe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On considère l'application $\varphi$ définie sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ par :

$$\forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2, \quad \varphi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}^{(k)}(a_k)\mathrm{Q}^{(k)}(a_k)$$

1. Démontrer que $\varphi$ définit un produit scalaire sur E.
2. Dans le cas où $n = 2$ et $(a_0, a_1, a_2) = (-1, 0, 1)$, donner une base orthonormale de E pour le produit scalaire $\varphi$.

## Exercice 3 ●○○ *Calcul d'une distance dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$*

On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et l'on considère l'application $\varphi$ définie sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ par :

$$\forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2, \quad \varphi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que $\varphi$ définit un produit scalaire sur E.
2. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\varphi(\mathrm{X}^p, \mathrm{X}^q)$.
3. Orthonormaliser la famille $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ par le procédé de Gram – Schmidt pour le produit scalaire $\varphi$.
4. En déduire :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} \left(t^3 - (at^2 + bt + c)\right)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

## Exercice 4 ●○○ *Un calcul de borne inférieure*

Déterminer la valeur de :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 \left|\ln x - ax - b\right|^2 \mathrm{d}x$$

## Exercice 5 ●●○ — *Polynômes orthogonaux de Tchebychev*

On note E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Dans la suite, on se permettra d'identifier polynômes et fonctions polynomiales associées sur $[-1,1]$. On pose :

$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2, \quad (f \mid g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

On s'intéressera également à la suite de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\mathrm{T}_0 = 1, \qquad \mathrm{T}_1 = \mathrm{X} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{T}_{n+1} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{n-1}$$

1. Démontrer que $(\cdot\mid\cdot)$ définit un produit scalaire sur E.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, prouver que $\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
3. Établir que les polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux orthogonaux et déterminer le degré de $\mathrm{P}_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$ la famille obtenue en appliquant le procédé de Gram – Schmidt à la famille $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$. Vérifier que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on peut écrire $\mathrm{T}_k = \lambda_k \mathrm{P}_k$ avec un réel $\lambda_k$ que l'on déterminera.

## Exercice 6 ●●○ — *Orthogonaux dans un espace fonctionnel*

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. On définit alors :

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2, \quad (f \mid g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Vérifier que $(\cdot\mid\cdot)$ est un produit scalaire sur E.
2. On définit la fonction $e_0 : t \in [0,1] \longmapsto 1$. Déterminer $(\mathrm{Vect}(e_0))^{\perp}$.
3. Si l'on introduit $\mathrm{G} = \{g \in \mathrm{E},\ g(0) = 0\}$, déterminer $\mathrm{G}^{\perp}$.

## Exercice 7 ●○○ — *Une expression de la trace*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et de produit scalaire noté $(\cdot\mid\cdot)$. Montrer que si $f$ est un endomorphisme de E alors, pour toute base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, on a :

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid f(e_k))$$

## Exercice 8 ●○○ — *Produit scalaire et transposition*

On fixe $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle.

1. Prouver que $\mathrm{Im}({}^t\mathrm{A}) = (\mathrm{Ker}(\mathrm{A}))^{\perp}$.
2. Démontrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \mathrm{Ker}({}^t\mathrm{A}\mathrm{A})$ puis que $\mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}({}^t\mathrm{A}\mathrm{A})$.

## Exercice 9 ●●○ — *Étude d'un endomorphisme*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et de produit scalaire noté $(\cdot\mid\cdot)$. On se donne $a$ et $b$ deux vecteurs unitaires de E. On définit alors sur E l'application $f$ suivante :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = x - (a \mid x)b$$

1. Justifier que $f$ est un endomorphisme de E.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f$ soit bijectif.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $f$ soit diagonalisable.

## Exercice 10 ••• *Un exemple où F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires*

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge. On pose également :

$$\forall (u,v)\in E^2,\quad (u\,|\,v)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

1. Justifier que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.
2. Vérifier que $(\cdot\,|\,\cdot)$ est un produit scalaire sur E.
3. On note F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
   Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E, déterminer $F^\perp$ et étudier si l'on a $E = F\oplus F^\perp$.

## Exercice 11 ••• *Caractérisation des projecteurs orthogonaux*

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $(\cdot\,|\,\cdot)$ et $\|\cdot\|$ les produit scalaire et norme associés. Si $p\in\mathscr{L}(E)$ est un projecteur de E, démontrer que $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement si on a :

$$\forall x\in E,\quad \|p(x)\|\leqslant\|x\|$$

## Exercice 12 ••• *Une relation pour être une base orthonormée*

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $(\cdot\,|\,\cdot)$ et $\|\cdot\|$ les produit scalaire et norme associés. On suppose qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ et une famille $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de vecteurs de E vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$ suivante :

$$\forall x\in E,\quad \|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}(x\,|\,e_i)^2 \tag{$\mathscr{P}$}$$

On pose $F=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$ et on note A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les $((e_i\,|\,e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Soit $u\in F^\perp$, calculer $\|u\|^2$. En déduire que E est de dimension finie.
2. On suppose dans cette question uniquement que $\|e_i\|\geqslant 1$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.
   Montrer que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.
3. On suppose dans cette question uniquement que la famille $\mathscr{B}$ est libre.

   a. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

   b. Démontrer que :

   $$\forall (x,y)\in E^2,\quad (x\,|\,y)=\sum_{k=1}^{n}(x\,|\,e_k)(y\,|\,e_k)$$

   c. En déduire que $A^2=A$.

   d. Soit $a$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A. Déterminer $\mathrm{Ker}\,a$.

   e. Conclure que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.