SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Quelques corrigés du T.D. n°7

Exercice 9 ••• *Étude d'une série de fonction*

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{Arctan}(n+x) - \operatorname{Arctan}(n))$$

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

On utilise le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan}(n+x) - \operatorname{Arctan}(n)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Soient $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$. Le théorème des accroissement finis appliqué à la fonction Arctan entre n et $n+x$ donne l'existence d'un $c \in]\,n, n+x\,[$ tel que :

$$\operatorname{Arctan}(n+x) - \operatorname{Arctan}(n) = \frac{x}{1+c^2} \leqslant \frac{x}{1+n^2}$$

On se donne $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}_+$, et on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [\,a, b\,], \quad |\operatorname{Arctan}(n+x) - \operatorname{Arctan}(n)| = \operatorname{Arctan}(n+x) - \operatorname{Arctan}(n) \leqslant \frac{x}{1+n^2} \leqslant \frac{b}{1+n^2}$$

où $b/(1+n^2)$ est le terme général d'une série convergente par comparaison avec une série de Riemann puisque $b/(1+n^2) \sim b/n^2$. On obtient ainsi la convergence normale et donc uniforme de la série de fonction définissant S sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

Ainsi le théorème s'applique et donne le résultat escompté.

2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

On utilise la relation $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(1/x) = \pi/2$ pour $x > 0$. Le terme général de la série de fonction définissant S s'écrit alors :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x > 0, \quad u_n(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n+x}\right)$$

Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes croissantes de sorte que S est croissante. Le théorème de la limite monotone donne que S admet une limite, finie ou infinie, en $+\infty$. Par l'absurde, on suppose que cette limite ℓ est finie. Par positivité, on a :

$$\forall N \geqslant 1, \quad \forall x > 0, \quad \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$$

On passe à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\forall N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \ell$$

Mais la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Arctan}(1/n)$ est divergente puisque son terme général est équivalent au terme général $1/n$ de la série harmonique. Cette série étant à termes positifs, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. En particulier, elle n'est pas majorée, ce qui contredit la la majoration précédente. On conclut que S tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

3. Y a-t-il convergence uniforme de la série de fonctions définissant S au voisinage de $+\infty$?

S'il y avait convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ au voisinage de $+\infty$, le théorème de la double limite s'appliquerait et donnerait la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \sum_{n\geqslant 1} \mathrm{Arctan}(1/n)$, ce qui est absurde.

Exercice 10 ●●● — *Étude d'une série de fonction*

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $]0,\pi[$ en posant :

$$\forall x \in]0,\pi[, \quad u_n(x) = \frac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.
On notera S la somme de cette série de fonctions.

On utilise le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions.

- Soit $x \in]0,\pi[$. On a, pour tout $n \geqslant 1$, $|u_n(x)| \leqslant |\cos(x)|^n$ avec $|\cos(x)| < 1$ d'où la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ par comparaison avec une série géométrique convergente. Ainsi $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0,\pi[$.
- Les fonctions (u_n) sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$ avec, pour $x \in]0,\pi[$ et $n \geqslant 1$, $u_n'(x) = \cos^{n-1}(x)\cos((n+1)x)$.
- Soit $[a,b] \subset]0,\pi[$, on a pour tout $x \in [a,b]$ et $n \geqslant 1$, $\left|u_n'(x)\right| \leqslant q^{n-1}$ où $q = \max(|\cos(a)|,|\cos(b)|)$ avec $\sum_{n\geqslant 1} q^{n-1}$ convergente puisque $\left|q\right| < 1$. On obtient la convergence normale et donc uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ sur tout segment de $]0,\pi[$.

Par théorème de cours, S est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.

2. Calculer S' et en déduire S sur $]0,\pi[$.

S' peut se calculer en la reliant à la partie réelle de la somme de la série géométrique de raison complexe $q = \cos(x)e^{ix}$. On trouve $\mathrm{S}'(x) = -1$ pour $x \in]0,\pi[$. On en conclut que $\mathrm{S}(x) = -x + \mathrm{C}$ pour $x \in]0,\pi[$ avec une certaine constante C. On trouve $\mathrm{C} = \pi/2$ en appliquant en $x = \pi/2$.