SÉRIES ENTIÈRES

Quelques corrigés du T.D. n°8

Exercice 5 ●○○ — *Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une fonction*

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \neq 0$. Par développement en série entière du sinus sur $\mathbb{R}$ avec un rayon de convergence infini, on a :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n}$$

De plus, comme $f(0) = 1$, on remarque que l'égalité précédente est encore vraie pour $x = 0$. Ainsi, f est égale à la somme d'une série entière de rayon de convergence infini sur $\mathbb{R}$. Par propriété des séries entières, f est alors de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 ●●○ — *Calcul d'une somme*

On pose, pour tout réel x où la série converge :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}$$

1. Prouver que la série entière associée à la somme f est de rayon de convergence 1.

   On vérifie facilement que le rayon de convergence est 1, par exemple en utilisant le critère de d'Alembert.

2. Exprimer $f(x)$ pour $x \in \,]-1,1[$.

   Soit $x \in \,]0,1[$. Par décomposition en éléments simples, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) x^n \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) - \frac{1}{x} \ln(1+x) \end{aligned}$$

   Pour $x \in \,]-1,0[$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) x^n \\ &= \frac{2}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} \right) - \frac{1}{x} \ln(1+x) \end{aligned}$$

   où l'on a calculé la somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} y^{2n+1}/(2n+1)$ par dérivation. En effet, la série entière dérivée est $\sum_{n \geqslant 0} y^{2n}$ de somme $1/(1-y^2)$ qu'il reste ensuite à intégrer.
   Enfin, si $x = 0$, on a directement $f(0) = 1$.

3. Justifier que f est bien définie est continue sur $[-1,1]$.

On a directement :

$$\forall n \geqslant 0, \qquad \sup_{x\in[-1,1]} \left|(-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}\right| = \sup_{x\in[-1,1]} \frac{|x|^n}{(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente, cela prouve la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions définissant f sur $[-1,1]$. Comme les fonctions sommées sont continues sur $[-1,1]$, la somme f est continue sur $[-1,1]$ par théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions.

4. En déduire la valeur de la somme :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$$

Avec la question **2** et par continuité de f en 1, on a :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)} = f(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) - \frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \frac{\pi}{2} - \ln 2$$

Exercice 11 ●●○ — *Nombres de Catalan*

On souhaite déterminer l'expression de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$c_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

1. On suppose que la série entière $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ et l'on note f sa somme. Montrer qu'au voisinage de 0, la fonction f vérifie la relation $xf(x)^2 = f(x) - 1$.

On fixe $x \in\,]-R, R[$ (qui est non vide par hypothèse). La relation de récurrence définissant la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet par produit de Cauchy d'affirmer que $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}x^n$. On montre alors facilement que $xf(x)^2 = f(x) - 1$ en calculant chaque terme de cette égalité et en montrant qu'ils coïncident bien (un changement de variable $\ell = n+1$ intervient sur le terme de gauche).

2. Toujours sous l'hypothèse de la question précédente, prouver qu'au voisinage de 0 la fonction f est égale à la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$$

Sous l'hypothèse de la question précédente, on sait que $xf(x)^2 = f(x) - 1$ sur $]-R, R[$. À $x \in\,]-R, R[$ fixé, on résout cette équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 - 4x$. On se place sur $]-R, R[\, \cap\,]-1/4, 1/4[$ de sorte que $\Delta > 0$. Cela donne, pour $x \neq 0$, deux racines $f(x) = (1 \pm \sqrt{1-4x})/(2x)$. Comme $f(0) = c_0 = 1 > 0$, on sait par continuité de f que f est strictement positive au voisinage de 0 ce qui nous permet de conclure que l'on a nécessairement, pour $x \neq 0$, l'égalité $f(x) = (1 - \sqrt{1-4x})/(2x)$ quitte à restreindre encore $]-R, R[\, \cap\,]-1/4, 1/4[$. Au point 0, on peut vérifier que l'égalité est vérifiée à l'aide d'un développement limité.

3. Montrer que la fonction g est développable en série entière en 0 et donner son développement et le rayon de convergence associé.

Pas de difficulté, on trouve que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\binom{n}{2n} x^n$ sur $]-1/4, 1/4[$ avec un rayon de $R = 1/4$.

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Sur $]-1/4, 1/4[$, on peut prouver que $xg(x)^2 = g(x) - 1$ et $g(0) = 1$, ce qui va nous donner que les coefficients $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du développement en série entière de g vérifient $d_0 = 1$ et $d_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On montre alors que $c_n = d_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par un raisonnement par récurrence, ce qui permet de conclure avec l'expression de d_n pour $n \in \mathbb{N}$ trouvée à la question précédente.

Exercice 12 ••• *Équivalents de sommes de séries entières*

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 2} \ln(n)x^n, \qquad \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n}$$

Dans la suite, on notera respectivement f, g et h les sommes de ces séries entières.

On obtient facilement $\mathrm{R} = 1$ dans chacun des cas.

2. Montrer que g est définie et continue sur $[-1,1[$.

Par le cours, on sait déjà que g est continue sur $]-1,1[$. Montrons qu'elle est continue sur $[-1,0]$. On remarque que, pour $x \in [-1,0]$, le terme général de la série définissant g est $(-1)^n|x|^n\ln(1-1/n)$ dont la valeur absolue est décroissante et tend vers 0. Le théorème spécial des séries alternées donne donc l'existence de $g(x)$ pour $x \in [-1,0]$ et une majoration du reste, toujours pour $x \in [-1,0]$: $\mathrm{R}_n(x) \leqslant |x|^{n+1}\ln(1-1/(n+1)) \leqslant \ln(1-1/(n+1))$. Ainsi la série de fonctions définissant g converge uniformément sur $[-1,0]$. Les fonctions $(x \mapsto (-1)^n|x|^n\ln(1-1/n))$ étant continues sur $[-1,0]$, on en déduit que g est continue sur $[-1,0]$ par théorème de continuité des sommes de séries de fonctions.

3. Pour $x \in]-1,1[$, déterminer une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.

Pour $x \in]-1,1[$, on calcule $(1-x)f(x) = f(x) - xf(x)$ en remplaçant f par la somme de la série entière la définissant. Après un changement d'indice ($\ell = n+1$) dans la seconde somme, on trouve que : $(1-x)f(x) = -g(x)$.

4. Prouver que $g+h$ est continue sur $[0,1]$ et en déduire que $g(x) \sim \ln(1-x)$ au voisinage de 1^-.
En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1^-.

Pour $x \in [0,1[$, on a $h(x)+g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}(1/n+\ln(1-1/n))x^n$ avec pour tout $n \geqslant 2$ et $x \in [0,1]$, la majoration $|1/n+\ln(1-1/n)x^n| \leqslant |1/n+\ln(1-1/n)| = \mathrm{O}(1/n^2)$ par développement limité. Ainsi la série définissant $h+g$ converge normalement sur $[0,1]$ et $h+g$ est continue sur $[0,1]$ par théorème de continuité des sommes de séries de fonctions. Ainsi $h+g$ est continue en 1 et donc bornée au voisinage de 1. Donc $h+g = \mathrm{O}(1)$ au voisinage de 1. Cela donne, en explicitant h grâce aux développements en série entière usuels, que, au voisinage de 1 : $g(x) = \ln(1-x) + x + \mathrm{O}(1)$. Cela permet de conclure que $g(x) \sim \ln(1-x)$ au voisinage de 1. Enfin, grâce à la relation de la question précédente, on trouve que $f(x) \sim \ln(1-x)/(x-1)$ au voisinage de 1.